Faktorsatsen

$$x^2+3x+2=0$$

Gissat $x=-1$ som en rot. Faktorn $(x-(-1))=(x+1)$ finns i VL.

Vi utför pol.div.

$$x+2$$

$$x^2+3x+2 \;\big|\; x+1$$

$$-\;x^2+x$$

$$2x+2$$

kvot

$$-\;2x+2$$

$$0$$

rest

Alltså

$$x^2+3x+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ eller } x=-2.$$

nov 2-13:04

Reella polynom

Exempel

$$x^2+3x+5=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+5=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{11}{4}$$

$$\Longleftrightarrow x+\frac{3}{2}=\pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$$

nov 2-13:04

$$z^2+3z+5=0$$

$$z=x+iy \qquad f(z)=$$

$$=z^2+3z+5=$$

$$(x+iy)^2+3(x+iy)+5$$

$$f(z)=(x^2+2ixy-y^2+3x$$

$$+3iy+5)=$$

$$x^2-2ixy-y^2+3x$$
$$-3iy+5 =$$
$$=(x-iy)^2+3(x-iy)$$
$$+5 = f(x-iy)$$
$$= f(\bar{z})$$

nov 2-13:04

Ex Tentauppg.

$3-2i$ given rot.

Koefficienterna reella. Alltså

$3+2i$ en rot.

nov 2-13:04

Faktorsats

Säger

$$(z-(3-2i))\cdot$$

$$(z-(3+2i))$$

är faktor

$$z^2 - z(3+2i)$$

$$- z(3-2i) + (3-2i)(3+2i)$$

nov 2-13:04

$$z^2 - 6z + 3^2 - (2i)^2$$

$$= z^2 - 6z + 13$$

Vi kan nu dela med denna faktor?

nov 2-13:04

$$z-5$$

$$z^3-11z^2+43z-65 \,\big|\, z^2-6z+13$$

$$-(z^3-6z^2+13z)$$

$$-5z^2+30z-65$$

$$-(-5z^2+30z-65)$$

$$0$$

kvot rest

Alltså är tredjeroten $\bar{5}$.

nov 2-13:39

Heltalspolynom

Rationella nollst.

till

$$z^3 - 11z^2 + 43z - 65$$

Om p/q är nollst. så

$p \mid -65$, $q \mid 1$.

nov 2-13:42

$q = \pm 1$

$p = \pm 1, \pm 5, \pm 13, \pm 65$

Även $3 \pm 2i$ är faktorer i -65

$(3+2i)(3-2i) = 13$

nov 2-13:44

Induktion

$\Rightarrow$ "leder till"

implikation

$P \Rightarrow Q$

"P implicerar Q"

"P medför Q"

nov 2-14:05

"Om P så Q"

"Om P gäller så gäller Q"

<u>Ex:</u> P = "$x = 2$"

Q = "$x^2 = 4$"

$P \Rightarrow Q \quad x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

nov 2-14:08

Ex:

P = "Jag tar tunnelbanan till KTH"

Q = "Jag kommer för sent till föreläsningen."

nov 2-14:10

Oklart om

$$P \Rightarrow Q.$$

nov 2-14:12

I induktion har vi en kedja av implikationer ($\Rightarrow$)

$$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow P_n \Rightarrow P_{n+1} \Rightarrow \ldots$$

nov 2-14:12

P_n: "$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$"

Antag P_k, dvs

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$

Vi får då

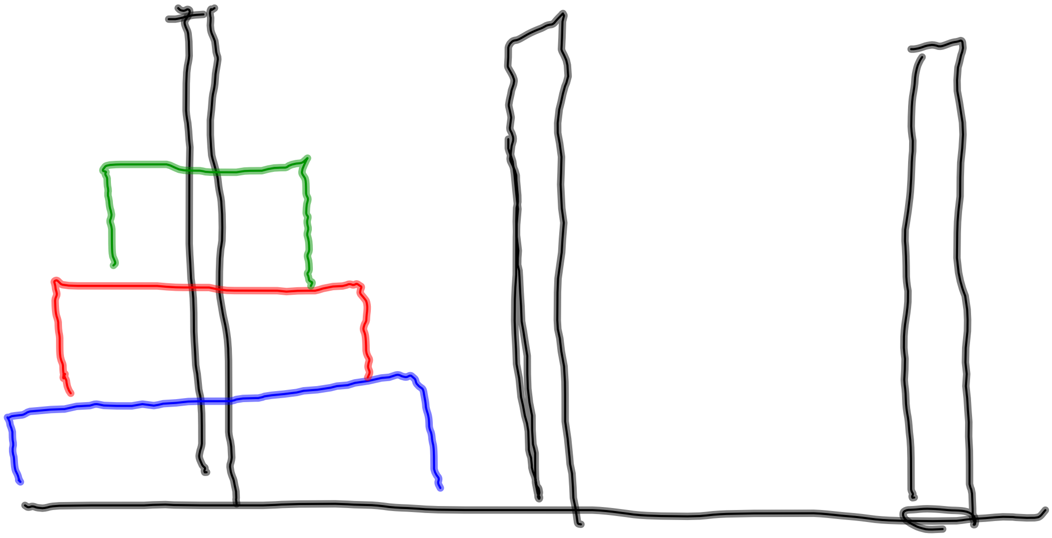
$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1)$$

$$+\,2(k+1)-1$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

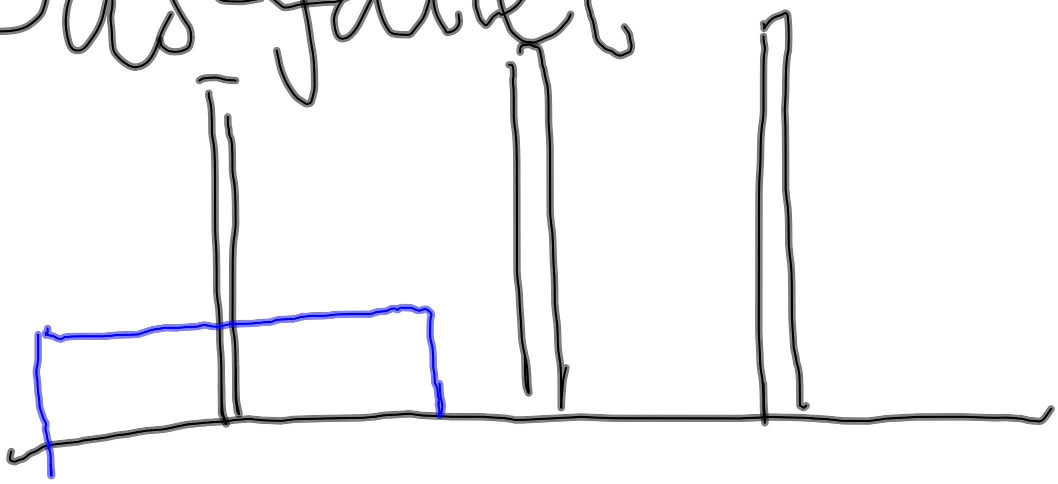
$$= (k+1)^2$$

nov 2-14:18



n = antalet brickor

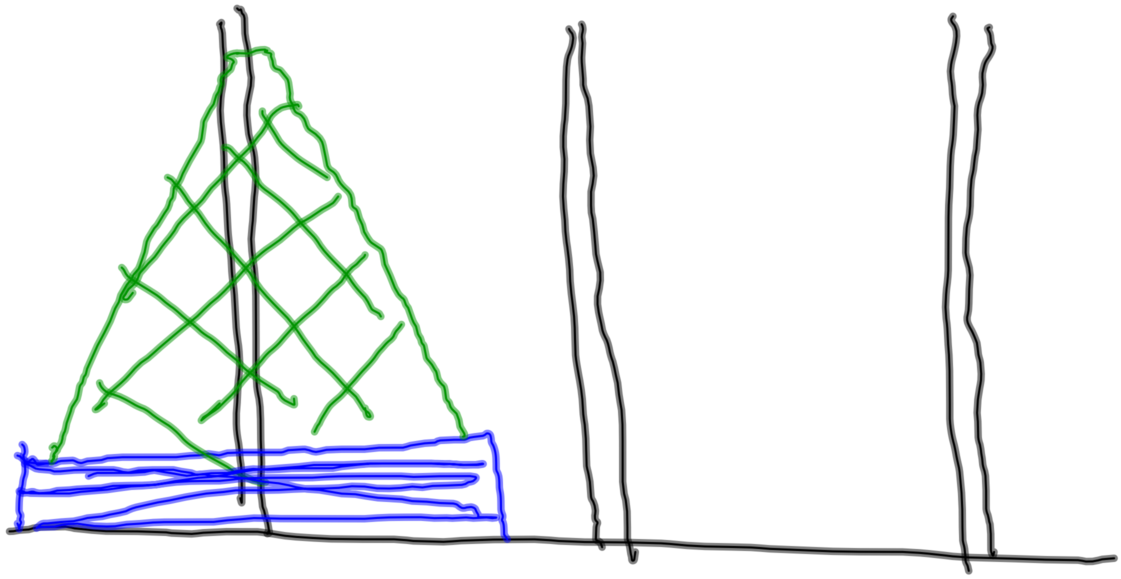
Bas-fallet $n=1$



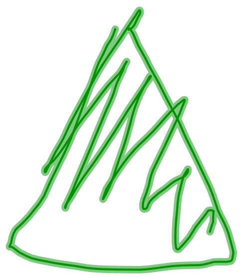
Räcker med 1 drag.

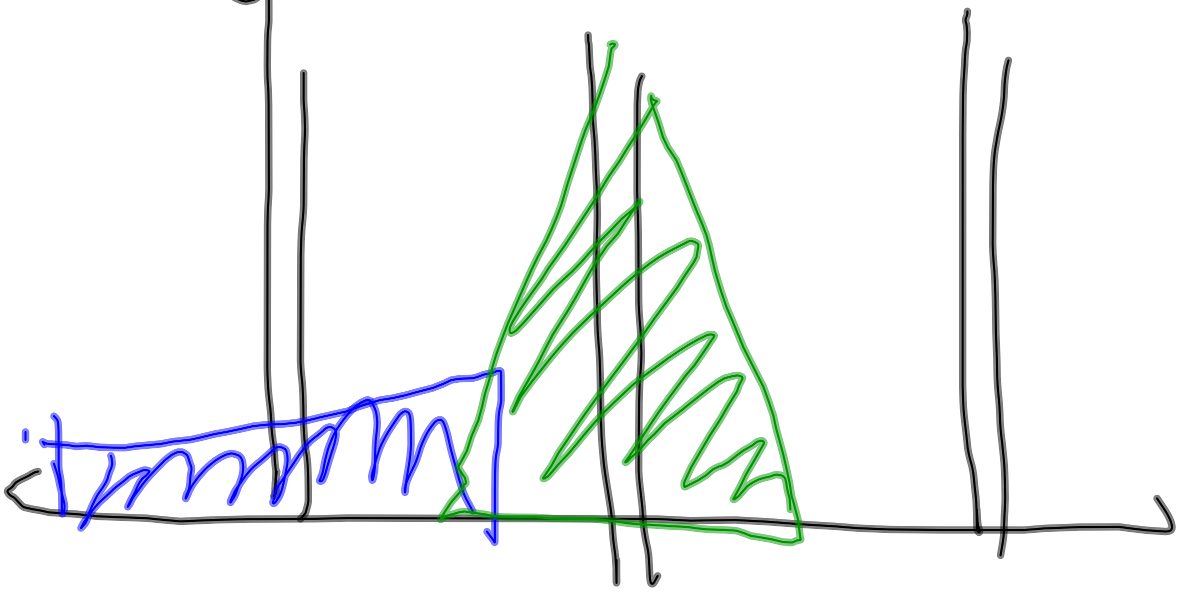
Antag att vi kan med k brickor. Hur gör vi med k+1 brickor?

nov 2-14:25

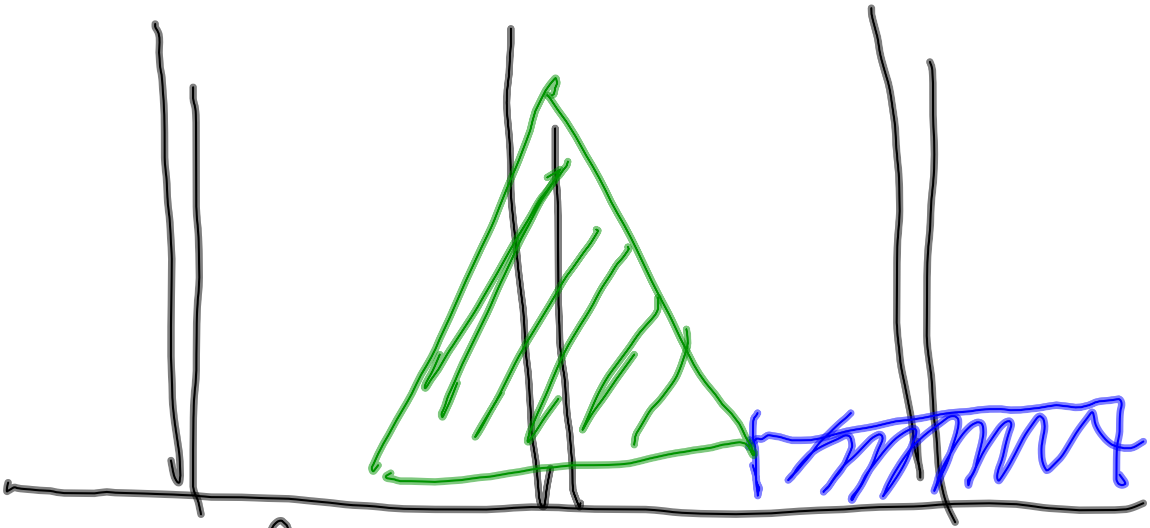


Vi kan flytta pyramiden

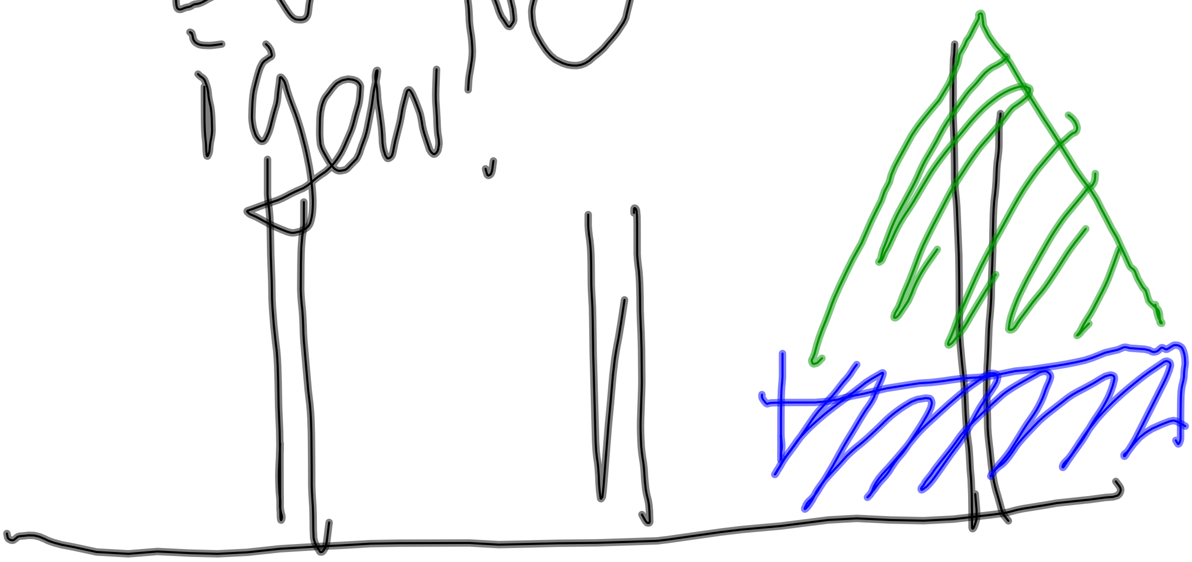




Flytta sedan stora brickan.



Lyft pyramiden igen.



nov 2-14:28

Vi kan räkna antal steg som behövs:

$$d_1 = 1$$

Induktionssteget:

$$d_{k+1} = d_k + 1 + d_k$$

$$= 2d_k + 1$$

nov 2-14:31

Rekursionsformel

$$d_{k+1} = 2 \cdot d_k + 1$$

$$d_1 = 1.$$

$$d_2 = 2 \cdot d_1 + 1 = 3$$

$$d_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$d_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

nov 2-14:33

$$d_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$$

$$d_6 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$$

$$d_7 = 2 \cdot 63 + 1 = 127$$

$$d_8 = 2 \cdot 127 + 1 = 255$$

$$d_9 = 2 \cdot 255 + 1 = 511$$

nov 2-14:34

Gissa ett

$$d_k = 2^k - 1$$

Bevisa att formeln stämmer med induktion!

nov 2-14:34

Basfall

$$a_1 = 1 = 2^1 - 1$$

Ok!

nov 2-14:35

Induktions-steg.

Antag att

$$d_k = 2^k - 1$$

Räkna ut

d_{k+1}.

nov 2-14:36

$$d_{k+1} = 2d_k + 1$$

$$= [\text{per induktion}]$$

$$= 2\cdot(2^k - 1) + 1$$

$$= 2\cdot 2^k - 2 + 1 =$$

$$= 2\cdot 2^k - 1 =$$

nov 2-14:36

$2^{k+1} - 1$.

Alltså gäller formeln för alla värden på n.

$2^n - 1$ drag för n brickor.

nov 2-14:37

Exempel

Polynomdivision.

Vill dividera $f(x)$ med $g(x)$. där $f(x)$ har grad n.

nov 2-14:41

Antag att vi kan polynomdiv. för $n=k$. Prova för $n=k+1$.

$$f(x)=a_{k+1}x^{k+1}+\underbrace{F(x)}_{\text{grad} \leq k}$$

Om $g(x) = b_m x^m + \ldots$

Så vill vi multipl.

$g(x)$ med något

cx^{k+1-m}

Så att vi får

Samma ledande

term som $f(x)$.

nov 2-14:44

Vi får ta $c = \dfrac{a_{k+1}}{b_m}$

och får

$$f(x) - \frac{a_{k+1}}{b_m} x^{k+1-m} \cdot g(x)$$

har grad $\leq k$.

Med induktions-

nov 2-14:45

antagandet kan vi gå vidare.

nov 2-14:47